

Semaine du 11 Janvier au 17 Janvier

Exercice 155 (Dérivées) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \ln(2x^3 + 3x). \quad 2. g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 156 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

$$1. \frac{xe^x - 1}{x} \geq e^x. \quad 2. 2x^2 - 3x + 1 < 0.$$

Exercice 157 (Récurrence) On considère $A, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $A = PDP^{-1}$. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^n P^{-1}$.

Exercice 158 (Sommes) Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

$$1. \sum_{k=1}^n 2^{2k+1}. \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-3)^{n-k}. \quad 3. \sum_{k=1}^n k(k-2).$$

Exercice 159 (Probabilité) Une urne contient 12 boules : 6 boules vertes, 4 boules rouges et 2 boules noires ; on tire au hasard successivement et avec remise 8 boules et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne. Donner la loi de X , son espérance et sa variance

Exercice 160 (Limites) Calculer les limites suivantes

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right). \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2}.$$

Exercice 161 (Système) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez A^{-1} . En déduire les

$$\text{solutions de } \begin{cases} x - z = 4 \\ 2y = 16 \\ x + z = 15 \end{cases}$$

Semaine du 18 Janvier au 24 Janvier

Exercice 162 (Dérivées) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \ln(x^2 + 4). \quad 2. g(x) = e^{1/x^2}.$$

Exercice 163 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

$$1. x^3 - 5x - 3 \geq 1. \quad 2. \frac{x^3 - 8}{x^2 - 1} > 0.$$

Exercice 164 (Récurrence) On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ vérifiant

$$\forall n \geq 1, 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0. \quad (1)$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant (1) avec $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Montrer que $\forall n \geq 1, v_n = 0$.

Exercice 165 (Sommes) Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

$$1. \sum_{k=1}^n e^{-k}. \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k. \quad 3. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}.$$

Exercice 166 (Probabilité) On lance 2 fois un dé équilibré à 6 faces et on note X la variable aléatoire qui vaut 0 si on fait 2 ou 11 et 1 sinon. Donnez la loi, l'espérance et la variance de X .

Exercice 167 (Limites) Calculer les limites suivantes

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 34}{x^7 - x^6 + 5}.$$

Exercice 168 (Système) Résoudre le système
$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 13 \\ 2x + 4y - 5z = -12 \\ 3x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

Semaine du 25 Janvier au 31 Janvier

Exercice 169 (Dérivées) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.

2. $g(x) = \frac{1}{x^3 - x}$.

Exercice 170 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

1. $x - xe^x \geq 0$.

2. $x^3 - 1 < 0$.

Exercice 171 (Récurrence) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Exercice 172 (Sommes) Donner le résultat de la somme ou du produit suivant :

1. $\sum_{k=0}^n (k^3 - 2 \times 3^k)$.

2. $\sum_{k=0}^n 4^k 3^{n-k}$.

3. $\prod_{k=1}^n \ln(k)$.

Exercice 173 (Probabilité) Dans un magasin, il y a n clients et m caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard et on appelle X le nombre de client choisissant la caisse numéro 1. Donnez la loi, l'espérance et la variance de X .

Exercice 174 (Limites) Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x \ln(x)$.

Exercice 175 (Système) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculez A^{-1} .

Semaine du 1er Février au 7 Février

Exercice 176 (Dérivées) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 + 4)^3$.

2. $g(x) = \ln(x^3 + x^2 + 1)$.

Exercice 177 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\frac{1}{x^2 + 1} \geq \frac{1}{x - 1}$.

2. $\sum_{k=0}^n e^{-k} < 0$.

Exercice 178 (Récurrence) On considère la fonction $f : x \rightarrow e^{x^2+3x}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable n fois et que

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2+3x}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n . Déterminer une relation entre P_{n+1} et P_n .

Exercice 179 (Sommes) Déterminer a et b tels que $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2}$. En déduire

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Exercice 180 (Probabilité) Un avion peut accueillir 20 personnes. On sait que 25% des clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : "nombre de clients qui viennent après avoir réservé". Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type?

Exercice 181 (Limites) Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$.

Exercice 182 (Système) Résoudre le système en fonction de λ

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y = 0 \\ x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Semaine du 8 Février au 14 Février

Exercice 183 (Dérivées) Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = (-x^2 + 4x)^4. \quad 2. g(x) = \frac{x-5}{x^2+3x+1}.$$

Exercice 184 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

$$1. e^{x^2+2x+\ln(2)} \geq 2. \quad 2. x^2 + 2 \geq 0.$$

Exercice 185 (Récurrence) On considère la fonction $f : x \rightarrow e^{-x^2}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable n fois et que

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n . Déterminer une relation entre P_{n+1} et P_n .

Exercice 186 (Sommes) Déterminer a et b tels que $\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$.
En déduire

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1}$$

Exercice 187 (Probabilité) Un joueur lance 3 fois une pièce truquée ayant pour probabilité $p \in]0, 1[$ de faire Pile. Le joueur gagnera j euros si pile tombe pour la première fois au j -ème tirage. Il perd 1 euro si pile ne tombe pas lors des 3 tirages. On note G le gain du joueur. Déterminer la loi de G , son espérance et sa variance.

Exercice 188 (Limites) Calculer les limites suivantes

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^3}{e^{2x}}.$$

Exercice 189 (Système) Résoudre le système en fonction de λ

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + (2 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

Semaine du 15 Février au 21 Février

Exercice 190 (Inéquations) Résoudre les inéquations suivantes.

$$1. \ln(x) + e^x \geq 0. \quad 2. \ln(x)e^x < 0.$$

Exercice 191 (Récurrence) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > 1$

🌀 **Remarque :** Pour effectuer une récurrence double, on suppose que \mathcal{P}_n et \mathcal{P}_{n+1} sont vraies et on montre \mathcal{P}_{n+2}

Exercice 192 (Sommes) Calculer les sommes suivantes

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k}. \quad 2. \prod_{k=3}^n k \quad 3. \sum_{k=1}^n kk!.$$

On remarquera pour la dernière que $k = k + 1 - 1$

Exercice 193 (Probabilité) On considère une urne contenant 2 boules noires et 2 boules blanches, toutes indiscernables. Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules noires tirées par A avant de tirer une boule blanche. Donner les probabilités des événements : $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$. En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 194 (Limites) Calculer les limites suivantes

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2)e^x. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}.$$

Exercice 195 (Système) Résoudre le système selon les valeurs de λ

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3 + \lambda)y + 3z = 0 \\ x + y - (2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 196 (Intégrales / Primitives) Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^3 -\frac{3}{x^2} dx. \quad 2. \int_0^4 e^{5x+1} dx. \quad 3. \int_0^2 \frac{x^2}{3x^3+1} dx.$$

Semaine du 22 Février au 7 Mars : Calcul d'intégrale

Exercice 197 Donner les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$1. t \rightarrow \frac{1}{t-2} \quad 2. t \rightarrow \frac{1}{t^2} \quad 3. t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Exercice 198 Donner les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$1. t \rightarrow \frac{(\ln(t))^3}{t} \quad 2. t \rightarrow \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2} \quad 3. t \rightarrow \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$$

Exercice 199 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 (t^2 + 3t) dt. \quad 2. \int_0^1 e^{2x-1} dx. \quad 3. \int_e^{e^2} \frac{1}{u \ln(u)} du.$$

Exercice 200 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 \frac{1}{t-2} dt. \quad 2. \int_1^4 (2z-1)e^{z^2-z} dz. \quad 3. \int_0^2 \frac{3e^t}{e^t+3} dt.$$

Exercice 201 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_e^{2e} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}} dt. \quad 2. \int_0^4 \sqrt{y}(y-2\sqrt{y}) dy. \quad 3. \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx.$$

Exercice 202 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt. \quad 2. \int_e^3 \frac{dx}{x \ln(x)}. \quad 3. \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx.$$

Exercice 203 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^2 z^4 e^{-z^5} dz. \quad 2. \int_0^1 (t^2 + 3t) dt. \quad 3. \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} dt.$$